G.D.T. Borel

$G = \mathcal{G}(\mathbb{R})$ $\mathcal{G}/_{\mathbb{Q}}$ connexe semisimple,

$\Gamma \subset G$ ssg arith sous torsion

Supp G connexe

$X = G/K$ $\quad \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \underbrace{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{k}^{\perp}}$ déc. de Cartan

E rep irred de dim finie de G ($E_{\mathbb{R}}$: triviale

$\leadsto$ E système local sur $\Gamma \backslash X$ ($\Leftrightarrow \Gamma \backslash (E \times X) \to \Gamma \backslash X$)

$\leadsto$ + produit scalaire "admissible"

Formes harmoniques et cohomologie

$$\underbrace{\mathcal{H}_2(\Gamma \backslash X, E)}_{\text{formes harm } L^2 \text{ sur } \Gamma \backslash X} \longrightarrow H(\Omega(X,E)^{\Gamma})$$

$$H(\Omega(X,E)^{\Gamma}) \simeq H(\Gamma \backslash X, E) \simeq H(\Gamma, E)$$

$$\cup \quad \underbrace{\mathcal{H}(X,E)^G}_{\text{nul si } E \text{ n'est pas triviale}} \longrightarrow H(\Gamma, E) \quad j$$

[I_G de Borel est triviale ($\simeq I(\mathfrak{g}, K, \mathbb{R}) \simeq H(K\backslash G_u, \mathbb{R})$)]

$\underline{Th}$ $\mathfrak{g}/\mathbb{Q}$ presque simple

1) $\mathcal{H}_2(_\Gamma\backslash X, E)$ est de dim finie

2) $\mathcal{H}(X, E)^G \subset \mathcal{H}_2(\Gamma\backslash X, E)$ est un $\simeq$ en degré $\leq rg_{\mathbb{R}} G - 1$

3) j est inj en deg $\leq 1 + c(G, E)$ et un $\simeq$ en deg $\leq \min(c(G,E), rg_{\mathbb{R}} G - 1)$

$c(G, E)$ dépend seulement du système de racines de G et de E.

$\left(c(G, \mathbb{R}) \geq \frac{rk_{\mathbb{Q}} G}{2} - 1\right)$ $(c(G,E) = \infty$ si $\Gamma\backslash G$ compact$)$

$\underline{Rk}$ si $_\Gamma\backslash G$ n'est pas cp j n'est pas inj en tout deg ($G = SL_2(\mathbb{R})$ $\Gamma \underset{\text{fini}}{\leq} SL_2\mathbb{Z}$)

$H^2(_\Gamma\backslash X, \mathbb{R}) = 0$

$\mathcal{H}^2(X, \mathbb{R})^G \neq 0$)

Cohomologie L^2 de ${}_\Gamma X$

$\Omega_2(\Gamma \backslash X, E)$
formes $\underset{\omega}{L^2}$ sur ${}_\Gamma X$
tq $d\omega$ soit L^2

$H_2({}_\Gamma X, E) :=$ $\underbrace{\phantom{H_2({}_\Gamma X, E)}}_{\text{coh } L^2}$ $H/\Omega_2(\Gamma\backslash X, E)$

$$\mathcal{H}_2({}_\Gamma X, E) \xrightarrow{\alpha} H_2({}_\Gamma X, E) \xrightarrow{\beta} H({}_\Gamma X, E)$$
$$H({}_\Gamma X, E) \,\|\, H(\Gamma, E)$$

- ${}_\Gamma X$ var riem complète

$\Rightarrow$ sur $\Omega_2({}_\Gamma X, E)$ ~~on~~ a un adjoint d^* de d qui tue $\mathcal{H}_2({}_\Gamma X, E)$ $\Rightarrow$ α injective

- th de Kodaira $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}\, \beta \circ \alpha = \mathrm{Im}\, \beta$

- β est surjective ~~en~~ deg $\leq c(G, E)$:

$\exists$ complexe $C_{\log} \subset \Omega({}_\Gamma X, E)$ qui calcule $H({}_\Gamma X, E)$ et $C_{\log} \subset \Omega_2({}_\Gamma X, E)$ en deg $\leq c(G, E)$

L'inj de j est délicate, ça utilise $I_G \subset C_{reg}$ et on ne montre pas que $\mathcal{H}_2({}_\Gamma X, E) \to H(\Gamma, E)$ est inj en bas degré.

Z $H_2({}_\Gamma X, E)$ peut être de dim ∞ (il est de dim finie $\Leftarrow$ $\mathcal{H}_2({}_\Gamma X, E) \hookrightarrow H_2({}_\Gamma X, E)$ est un $\simeq$).

__Th__ 1) (Zucker) $H_2({}_\Gamma X, E) \simeq H({}_\Gamma X, E)$ en degré $\leq c(G, E)$

2) (Borel-Casselman) Si $\mathcal{G}$ n'a pas de sous-groupe $\mathbb{Q}$-parabo propre contenant un Cartan de $\mathfrak{k} \Rightarrow \dim H_2({}_\Gamma X, E) < \infty$ (ex : $\operatorname{rg} K = \operatorname{rg} G \Rightarrow$ le th s'applique)

3) (Clozel) la réciproque de 2) est vraie si on peut remplacer Γ par un sous-gr d'indice fini

Lien avec la coh de G

V un G-Fréchet continu

$V^\infty = \{v \in V \,/\, G \to V \;\; C^\infty\}$ Fréchet continu
$\qquad\qquad\qquad\qquad g \to g\cdot v$

$\mathfrak{g} \circlearrowleft$
$G \circlearrowleft$

$$H(\mathfrak{g}, K, V^\infty) := H(C(\mathfrak{g}, K, V^\infty))$$

$$C(\mathfrak{g}, K, V^\infty) = \mathrm{Hom}_K(\Lambda \mathfrak{p}, V^\infty)$$

<u>Th</u> (van Est, P. Blanc)

$$H_{cont}(G, V) = H_{cont}(G, V^\infty) \xrightarrow{\sim} H_{lisse}(G, V^\infty) \xrightarrow{\sim} H(\mathfrak{g}, K, V^\infty)$$

<u>ex</u> 1) $H(\Gamma, E) = H_{lisse}(G, \mathrm{Ind}_\Gamma^G E)$

$\xrightarrow{\sim} H_{lisse}(G, C^\infty(_\Gamma\backslash G) \otimes E) \xrightarrow{\sim} H(\mathfrak{g}, K, C^\infty(_\Gamma\backslash G, E))$ déjà vu ds l'exposé de Vincent

$$\Omega(X, E)^\Gamma \xrightarrow{\sim} C(\mathfrak{g}, K, C^\infty(_\Gamma\backslash G) \otimes E)$$

$i)$ $\Omega(X, E)^G \xrightarrow{\sim} C(\mathfrak{g}, K, E)$

nul sauf si E est triviale (formule de Kuga)

Si E est triviale

$C(\mathfrak{g}, K, \mathbb{R}) = H(\mathfrak{g}, K, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} H_{cont}(G, \mathbb{R})$

$\xrightarrow{\sim}$ $H(K \backslash G_u, \mathbb{R})$ $\quad K\backslash G_u$ dual compact de X

($G_u \subset G(\mathbb{C})$ contenant K lié $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{f} \oplus i\mathfrak{g}_0$)

Lien avec le spectre discret

$L^2 = L^2(\Gamma\backslash G)$ $\quad C^\infty = C^\infty(\Gamma\backslash G)$

$L^{2,\infty} = (L^2)^\infty$ (beaucoup plus petit que C^∞ quand $\Gamma\backslash G$ pas compact)

Vie $\Omega(X, E)^\Gamma \simeq C(\mathfrak{g}, K, C^\infty \otimes E) \rightsquigarrow$

$C(\mathfrak{g}, K, L^{2,\infty}) \subset \Omega_2(\Gamma\backslash X, E)$

$\subset \underbrace{C(\mathfrak{g}, K, (C^\infty \cap L^2) \otimes E)}_{\text{esp vect gradué}}$

(pas un complexe)

$\underline{\text{Th}}$ (Borel) $H(\mathfrak{g}, K, L^{2,\infty}_{\otimes E}) \simeq H_2(_\Gamma X, E)$

$$\begin{gathered} \wr\wr \\ H_{cont}(G, L^2_{\otimes E}) \end{gathered}$$

$\hat{G} = \{$irred unitaires de $G\}/\simeq$

$$L^2_{disc} := \overline{\sum_{\substack{\pi \in \hat{G} \\ \pi \subset L^2}} \pi}$$

Harish-Chandra :

$$L^2_{disc} = \hat{\bigoplus_{\pi \in \hat{G}}} \pi^{\oplus m(\pi)} \qquad \boxed{m(\pi) < \infty}$$

$\underline{\text{Th}}$ (Borel-Garland)

$$\overline{\mathcal{H}}_2(_\Gamma X, E) \xrightarrow{\simeq} H(\mathfrak{g}, K, L^{2,\infty}_{disc} \otimes E)$$

$$\wr\wr$$

$$H_{cont}(G, L^2_{disc} \otimes E)$$

$$\xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} H(\mathfrak{g}, K, \pi^{\infty} \otimes E)^{\oplus m(\pi)}$$

D'où vient le $rg_{\mathbb{R}} G - 1$ du premier th ?

$\exists$ th d'annulation plus fort que Garland qui donne $H(\mathfrak{g}, K, \pi^\infty \otimes E) = 0$ jusqu'à $\mathrm{rg}_{\mathbb{R}} G - 1$ (Schmid)

<u>Points amusants de la preuve</u>

$A = \mathcal{H}_2({}_\Gamma X, E)$ $\qquad B = \bigoplus_{\pi} \underbrace{H(\mathfrak{g}, K, \pi^\infty \otimes E)}_{\text{dim finie}}^{m(\pi)}$

on veut $A = B$.

- $B \subset A$; Kuga (formel).
- $A \subset B$. $\omega \in A$ $\quad \omega = \sum_I f_I \cdot \omega^I$

(ω^I par rapport à une base de $\mathfrak{p}$).

Kuga : $\underset{\underset{0}{\parallel}}{(\Delta \omega)}_I = (\underset{\text{Casimir}}{C_E} - C_{\pi^\infty}) f_I$

$\Rightarrow C f_I = C_E f_I$

$f_I \in C^\infty \cap L^2$

le complexe fait intervenir des $\mathrm{Hom}_K(\Lambda \mathfrak{p}, -) \Rightarrow f_I$ sont K-finies ; de K-types fixés

Th (Borel-Garland)

$\tau \in \hat{K}$ rep irred $\Rightarrow \{f \in L^2 \cap C^\infty$
$\lambda \in \mathbb{R}$

de K-type τ et tq $Cf = \lambda f\}$ est

de dim finie, formé de formes automorphes !

Rk 2 points ds la preuve :

- inégalité de type Sobolev pour contrôler $\|f * \varphi - f\|_{L^2}$ $\varphi \in C_c^\infty(G)$

- sur $L^2_{cusp} \subset L^2_{disc}$ les $f \mapsto f * \varphi$ sont compacts $\Rightarrow L^2_{cusp} \cap$ notre espace est de dim finie

- difficile (Langlands) : notre espace rencontre $L^2_{cont} = (L^2_{disc})^\perp$

Ref: Borel: Stable coh of real groups II

- Borel–Garland: Laplacian & the discrete spectrum of an arithmetic group
- Clozel: On limit multiplicities of discrete series representations in spaces of automorphic forms
- Borel–Casselman: L^2 cohomology of locally symmetric manifolds of finite volume
- Zucker: L^2 cohomology of warped products & arithmetic groups
- Schmid: Vanishing theorems for Lie algebra cohomology and the coh. of discrete subgroups of semisimple Lie groups